

第四章 系統模型推導與控制器設計

圖 4-1 為本研究的系統方塊圖，此系統分為軟體及硬體兩大部分。在此章節將會，介紹本研究所使用的 PID 控制器架構，以及運用牛頓運動定律，推導定位平台之運動方程式且證明此系統為一穩定系統。

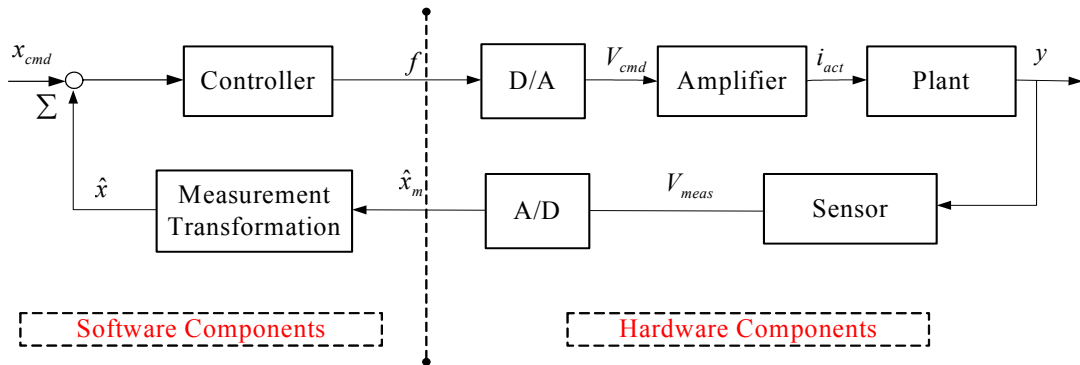


圖 4-1 系統方塊圖

4.1 系統動態描述

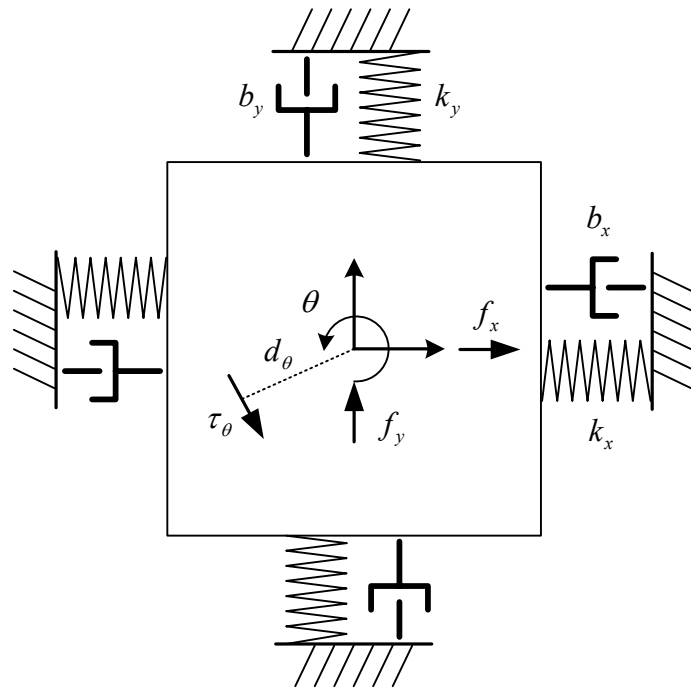


圖 4-2 運動平台座標與力的相關性

為了發展定位平台整體的數學模型，需將座標與輸出力的相關聯性如同圖 4-2 所定義，原點即為初始位置(O)。因此，假設此撓褶式機構是個彈性質量阻尼系統，由於對稱的特性，X 軸與 Y 軸的動態模型各自獨立，並假設平台四邊連接部分之彈性係數 (k_x 、 k_y)與阻尼比(b_x 、 b_y)皆相同。根據牛頓定律，總體施加在平台上之力的動態方程式表示如下：

$$\sum F_x : M\ddot{x} = f_x - 2f_{kx} - 2b_x\dot{x} \quad (4-1)$$

$$\sum F_y : M\ddot{y} = f_y - 2f_{ky} - 2b_y\dot{y} \quad (4-2)$$

$$\sum \tau_\theta : I\ddot{\theta} = \tau_\theta - 2f_{k\theta} - b_\theta\dot{\theta} \quad (4-3)$$

其中 M 是平台質量， I 是運動平台沿 Z 軸之慣性矩， k 是彈性係數， k_θ 是剪力之彈性係數， b_x 是阻尼常數， b_θ 是剪力之阻尼常數。

其中由圖 4-3 可知各線圈所產生的力為

$$f_x = k_{u,x}u_x - \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_\theta \quad (4-4)$$

$$f_y = k_{u,y}u_y + \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_\theta \quad (4-5)$$

$$\tau_\theta = k_{u,\theta}u_\theta d_\theta + k_{u,x}u_x d_x - k_{u,y}u_y d_y \quad (4-6)$$

由圖 4-3 可知各軸彈簧所產生力的為

$$f_{kx} = k_x x \quad (4-7)$$

$$f_{ky} = k_y y \quad (4-8)$$

$$f_{k\theta} = k_{\theta}\theta \quad (4-9)$$

將式(4-4)~式(4-9)代入(4-1)~式(4-3)整理後可得

$$\sum F_x : M\ddot{x} = k_{u,x}u_x + \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_{\theta} - 2[k_x x] - 2b_x\dot{x} \quad (4-10)$$

$$\sum F_y : M\ddot{y} = k_{u,y}u_y + \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_{\theta} - 2[k_y y] - 2b_y\dot{y} \quad (4-11)$$

$$\sum \tau_{\theta} : I\ddot{\theta} = k_{u,\theta}u_{\theta} + k_{u,x}u_x d_x + k_{u,y}u_y d_y - [k_{\theta}\theta] - b_{\theta}\dot{\theta} \quad (4-12)$$

回顧前面提及電磁致動器之力的特性，假設其磁通密度不變的情況下力可簡化成

$$f_{act} = 2NLBi = K_i i \quad (4-13)$$

其中 $i=1\sim 3$ ，將此方程式代入平台動態模型式(4-1)~式(4-3)，並重新整理後可得

$$M\ddot{x} + 2b_x\dot{x} + 2k_x x = k_{u,x}u_x + \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_{\theta} \quad (4-14)$$

$$M\ddot{y} + 2b_y\dot{y} + 2k_y y = k_{u,y}u_y + \frac{\sqrt{2}}{2}k_{u\theta}u_{\theta} \quad (4-15)$$

$$I\ddot{\theta} + b_{\theta}\dot{\theta} + k_{\theta}\theta = k_{u,\theta}u_{\theta} + k_{u,x}d_x u_x + k_{u,y}d_y u_y \quad (4-16)$$

其中 $u_x = i_1$ 、 $u_y = i_2$ 與 $u_{\theta} = i_3$ 分別是三個線圈之控制命令，亦即是每個致動器之電流值。為了使其等號左右兩邊去除 M 及 I ，所以將式(4-6)~式(4-8)改寫為

$$\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_2x = a_1u_x + a_0u_{\theta} \quad (4-17)$$

$$\ddot{y} + b_3\dot{y} + b_2y = b_1u_y + b_0u_\theta \quad (4-18)$$

$$\ddot{\theta} + c_4\dot{\theta} + c_3\theta = c_2u_\theta + c_1u_x + c_0u_y \quad (4-19)$$

其中

$$a_3 = \frac{2b_x}{M}, a_2 = \frac{2k_k}{M}, a_1 = \frac{k_{u,x}}{M}, a_0 = \frac{\sqrt{2}k_{u\theta}}{2M}$$

$$b_3 = \frac{2b_y}{M}, b_2 = \frac{2k_y}{M}, b_1 = \frac{k_{u,y}}{M}, b_0 = \frac{\sqrt{2}k_{u\theta}}{2M}$$

$$c_4 = \frac{b_\theta}{I}, c_3 = \frac{k_\theta}{I}, c_2 = \frac{k_{u,\theta}}{I}, c_1 = \frac{k_{u,x}d_x}{I}, c_0 = \frac{k_{u,y}d_y}{I}$$

因此我們將可利用式(4-17)~式(4-19)，設計控制律

為證明此控制式為穩定狀態，將式(4-17)~式(4-19)作拉式轉換(Laplace transform)，首先式(4-17)可轉換為

$$s^2x(s) + a_3sx(s) + a_2x(s) = a_1u_x(s) + a_0u_\theta$$

$$(s^2 + a_3s + a_2)x(s) = a_1u_x(s) + a_0u_\theta \quad (4-20)$$

轉移函數為

$$G_{xx}(s) = \frac{x(s)}{u_x(s)} = \frac{a_1}{s^2 + a_3s + a_2} \quad (4-21)$$

$$G_{x\theta}(s) = \frac{x(s)}{u_\theta(s)} = \frac{-a_0}{s^2 + a_3s + a_2} \quad (4-22)$$

特徵方程式為 $\Delta_1(s) = \Delta_2(s) = s^2 + a_3s + a_2$ ，所以根據羅斯穩定準則 (Routh-Hurwitz Rule)

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & a_2 \\ s^1 & a_3 & \\ s^0 & a_2 & \end{array}$$

可得當 $a_2 = \frac{2k_x}{M}$ 時 M 、 k_x 皆大於 0，所以 $a_2 > 0$ ；當 $a_3 = \frac{2b_x}{M}$ 時 M 、 b_x 皆大於 0，所以 $a_3 > 0$ ；所以穩定。

將式(4-18)也同上述步驟轉換為

$$\begin{aligned} s^2 y(s) + b_3 s y(s) + b_2 y(s) &= b_1 u_y(s) + b_0 u_\theta \\ (s^2 + b_3 s + b_2) y(s) &= b_1 u_y(s) + b_0 u_\theta \end{aligned} \quad (4-23)$$

轉移函數為

$$G_{yy}(s) = \frac{y(s)}{u_y(s)} = \frac{b_1}{s^2 + b_3 s + b_2} \quad (4-24)$$

$$G_{y\theta}(s) = \frac{y(s)}{u_\theta(s)} = \frac{-b_0}{s^2 + b_3 s + b_2} \quad (4-25)$$

特徵方程式為 $\Delta_1(s) = \Delta_2(s) = s^2 + b_3 s + b_2$ ，所以根據羅斯穩定準則

(Routh-Hurwitz Rule)

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & b_2 \\ s^1 & b_3 & \\ s^0 & b_2 & \end{array}$$

可得當 $b_2 = \frac{2k_y}{M}$ 時 M 、 k_y 皆大於 0，所以 $b_2 > 0$ ；當 $a_3 = \frac{2b_x}{M}$ 時 M 、 b_x 皆大於 0，所以 $a_3 > 0$ ；所以穩定。

將式(4-19)也同上述步驟轉換為

$$s^2 \theta(s) + c_4 s \theta(s) + c_3 \theta(s) = c_2 u_\theta(s) + c_1 u_x + c_0 u_y$$

$$(s^2 + c_4s + c_3)\theta(s) = c_2u_\theta(s) + c_1u_x + c_0u_y \quad (4-26)$$

轉移函數為

$$G_{\theta\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{c_2}{s^2 + c_4s + c_3} \quad (4-27)$$

$$G_{\theta x}(s) = \frac{\theta(s)}{u_x(s)} = \frac{c_1}{s^2 + c_4s + c_3} \quad (4-28)$$

$$G_{\theta y}(s) = \frac{\theta(s)}{u_y(s)} = \frac{-c_0}{s^2 + c_4s + c_3} \quad (4-29)$$

特徵方程式為 $\Delta_1(s) = \Delta_2(s) = \Delta_3(s) = s^2 + c_4s + c_3$ ，所以根據羅斯穩定準則

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & c_3 \\ s^1 & c_4 & \\ s^0 & c_3 & \end{array}$$

可得當 $c_3 = \frac{k_\theta}{I}$ 時 I 、 k_θ 皆大於 0，所以 $c_3 > 0$ ；當 $c_4 = \frac{b_\theta}{I}$ 時 I 、 b_θ 皆大於 0，

所以 $a_3 > 0$ ；所以穩定。

將式(4-7)~式(4-19)所得之結果，並由羅斯穩定準則證明此系統為一穩定系統。

4.2 PID 控制系統架構

在產業生產製程係系統控制的發展歷程中，PID 控制是歷史最悠久、生命力最強的基本控制方式。在 20 世紀 40 年代以前，除最簡單的情況下可採用開關控制外，PID 是唯一的控制方式。此後，隨著科學技術的發展，特別是數位式電腦的誕生和發展，發展出許多新型的控制法則。然而到現在，PID 控制由於自身的優點仍然是得到最廣泛應用的基本控制法則[41]。

PID 控制具有下列優點

1. 原理簡單，方便使用。
2. 適應性強，可以廣泛應用於各種工業程序控制領域。
3. 強韌性好，即其控制品質對被控制系統特性的變化不大敏感。

基於上述優點，PID 仍被廣泛使用的原因。一方面，它的成本低廉，易於操作；另一方面，對於絕大部分控制系統，可以不必深究其模型結構，直接應用 PID 控制，其在可接受的程度下的強韌性保證了加入，控制裝置的系統的性能指標基本能滿足要求。當然 PID 控制也有其缺點，對於大延遲系統和性能指標要求特別高的系統，PID 控制就無能為力，這就必須考慮採用複雜的控制系統。

傳統的 PID 控制器其實是目前最能夠理解與實現的控制器，主要是由比例(Proportional)、積分(Integral)、微分(Derivate)三項控制器組合而成，圖 4-3 所示為 PID 控制器的基本型態。

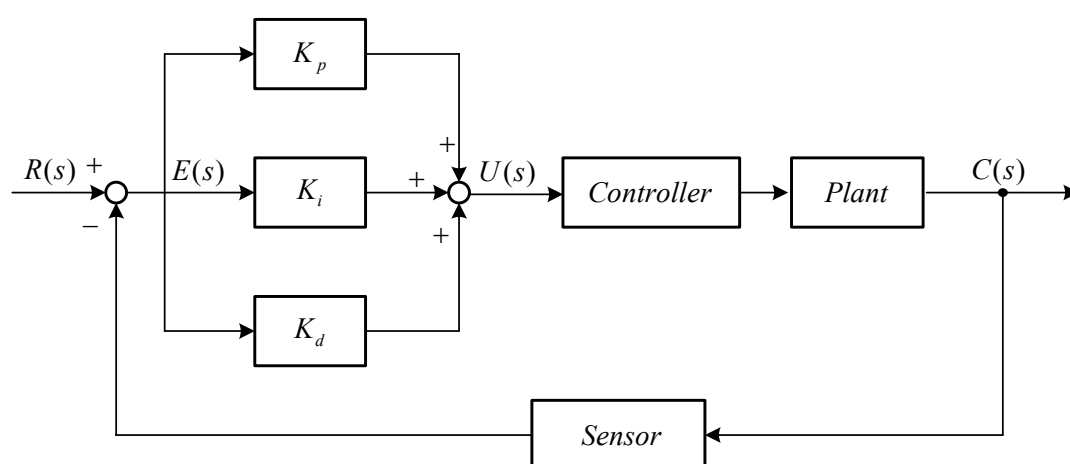


圖 4-3 PID 典型 PID 控制結構圖

這是典型的按誤差控制的負回授結構。其中 $E(s)$ 是誤差，即輸出量 $C(s)$ 目標值 $R(s)$ 之間的差，分別對誤差信號 $E(s)$ 進行比例、積分與微分運

算，其結果的加權和構成系統的控制信號 $U(s)$ ，作用於被控系統 $G(s)$ ，並引起輸出量的響應變化，達到控制的目的。PID 控制器其控制的數學關係方程式為：

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

經過拉式轉換處理[42]，可得 PID 控制器轉移函數關係式：

$$C_b(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$

其中 K_p 、 K_I 、 K_D 為比例、積分與微分增益值，當增加比例增益 K_p 值時，系統動作將變快，並能降低穩態誤差(Steady-State Error)，但是會損失系統的穩定性；積分增益值 K_I 的大小會影響系統整體的表現，雖然加入積分動作可以改善穩態誤差，但是原始系統也因而增加一階，使系統變得更為複雜而難以控制，積分增益值愈大，系統振動的狀況也愈嚴重，甚至造成系統的不穩定；而微分動作具有預先修正誤差的能力，微分增益值 K_D 會影響系統的響應速度，值愈大系統的響應速度愈快，但是卻特別容易放大高頻雜訊； K_p 、 K_I 、 K_D 其對 PID 控制器參數與系統時域性能指標之間的關係表 4-1。

表 4-1 PID 參數與系統時域性能指標之間的關係

參數	上升時間	上升超越量	安定時間	穩態誤差
KP	減少	增加	微小改變	減少
KI	減少	增加	增加	消除
KD	微小改變	減少	減少	微小改變

表 4-1 的意義為是 PID 參數增大時各系統性能指標的變化情況。若這三項增益值選取的適當，則 PID 控制器通常能提供不錯的輸出響應能力與穩定性，在本研究的應用中，則首重系統的穩定性。由於必須同時調整 K_P 、 K_I 、 K_D 三項參數，所以通常根軌跡與波德圖設計方法皆無法被直接採用。

4.2.1 Ziegler-Nichols 調整演算法

在 1912 年 Ziegler-Nichols[42]，提出一種實用的 PID 控制經驗公式，這經驗公式是基於帶有延遲的一階轉移函數模型提出的。系統模型可以表示為

$$G(s) = \frac{k}{1+sT} e^{-sL} \quad (4-1)$$

在實際的承程序控制系統中，有許多的系統模型可以近似的，由這樣的一階模型來表示，如果不能物理的建立起系統模型，我們還可以由實驗提取相應的模型參數表 4-2 經驗公式設計 PID 控制器，PID 控制器參數將可以由表中給予的經驗公式設計出來。

表 4-2 Ziegler-Nichols 調整公式

控制器類型	由步階響應調整			由頻域響應調整		
	K_P	T_i	T_d	K_P	T_i	T_d
P	$1/a$			$0.5K_c$		
PI	$0.9/a$	$3L$		$0.4K_c$	$0.8T_c$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$	$0.6K_c$	$0.5T_c$	$0.12T_c$

4.2.2 Chien-Hrones-Reswick 調整演算法

在實際應用中，傳統的 Ziegler-Nichols 演算法有著各種各樣的變形，所謂的 Chien-Hrones-Reswick(CHR)演算法，就是其中的一種改進。表 4-3 中給予了 PID 類控制器設計的經驗公式，其中還允許帶有較大的阻尼，以確保沒有超越量的最快速響應，該指標在表中標識為有 0% 超越量，該表中還允許設計出所謂帶有 20% 超越量的最快速響應，在表 4-3 中標識為有 20% 超越量。

表 4-3 設定點問題的 Chien-Hrones-Reswick 調整公式

控制器類型	有 0% 超越量			有 20% 超越量		
	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.35/a$	$1.2T$		$0.6/a$	T	
PID	$0.6/a$	T	$0.42L$	$0.95/a$	$1.4T$	$0.47T$

表 4-4 擾動抑制問題的 Chien-Hrones-Reswick 調整公式

控制器類型	有 0% 超越量			有 20% 超越量		
	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.6/a$	$4T$		$0.7/a$	$2.3T$	
PID	$0.95/a$	$2.4T$	$0.42L$	$1.2/a$	$2T$	$0.42T$

和傳統的 Ziegler-Nichols 演算法相比，在 CHR 演算法中直接使用了時間常數 T 。在這個演算法下指出了設定點控制的和擾動抑制上的區別。CHR 的擾動抑制的 PID 控制器設計演算法在表 4-4 中給定。

4.2.3 Cohen-Coon 調整演算法

另一種類似於 Ziegler-Nichols 調整演算法的方法是所謂的 Cohen-Coon 調整演算法。若從步階響應資料提取特徵參數，即 $a = kL/T$ 且 $\tau = L/(L+T)$ 則不同的控制器可以直接由表 4-5 中所給的方法加以設計。

表 4-5 Cohen-Coon 調整演算法的控制器參數

控制器種類	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{0.35\tau}{1-\tau} \right)$		
PI	$\frac{0.9}{a} \left(1 + \frac{0.92\tau}{1-\tau} \right)$	$\frac{3.3-3\tau}{1+1.2\tau} L$	
PD	$\frac{1.24}{a} \left(1 + \frac{0.13\tau}{1-\tau} \right)$		$\frac{0.27-0.36\tau}{1-0.87\tau} L$
PID	$\frac{1.35}{a} \left(1 + \frac{0.18\tau}{1-\tau} \right)$	$\frac{2.5-2\tau}{1-0.39\tau} L$	$\frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau} L$